

English assignment follows the Danish version

Opgavesæt til:

Skriftlig prøve: 26. June 2026

Kursus navn og nr.: **02403 Introduktion til matematisk statistik**

Varighed: 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle skriftlige hjælpemidler samt lommeregner model TI30XS eller TI30XB

Vægtning: Eksamensspørgsmål vægtes ligeligt (see detaljer nedenfor).

For at besvare spørgsmålene skal du udfylde et særskilt “Answer Sheet”.

Opgavesættet består af 30 spørgsmål af “multiple choice” typen, som er fordelt på 10 opgaver. Du skal kun aflevere dit “Answer Sheet” og ikke hele opgavesættet.

Multiple choice spørgsmål: Eksamen består af 30 multiple choice-spørgsmål med mulige svar: 1, 2, 3, 4, 5 og 6 (hvor 6 altid refererer til svaret ”Ved ikke/intet svar”). Et korrekt svar giver 5 point, et forkert svar giver -1 point, og ”Ved ikke/intet svar”(6) giver 0 point. Det er ikke tilladt at vælge mere end én svarmulighed for et enkelt spørgsmål. Hvis dette alligevel sker, gives der 0 point for spørgsmålet.

Brug af Python til denne eksamen: Denne eksamen indeholder Python kode. Bemærk at vi bruger de følgende biblioteker og forkortelser:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import scipy.stats as stats
import statsmodels.api as sm
import statsmodels.formula.api as smf
import statsmodels.stats.power as smp
import statsmodels.stats.proportion as smprop
```

Fortsæt på side 2

Opgave I

En studerende tager en multiple choice-eksamen med 30 spørgsmål. For hvert spørgsmål er der fem muligheder, hvor kun én er korrekt. Den studerende spekulerer på, hvad sandsynligheden er for at svare korrekt på mindst 15 spørgsmål, hvis han besvarer alle spørgsmål fuldstændig tilfældigt.

Spørgsmål I.1 (1)

Hvilken af følgende Python-kommandoer beregner den ønskede sandsynlighed?

1 ☐ `1 - stats.hypergeom.cdf(14, 30, 6, 15)`

2 ☐ `1 - stats.hypergeom.cdf(15, 30, 5, 15)`

3 ☐ `1 - stats.binom.cdf(14, 30, 1/5)`

4 ☐ `1 - stats.hypergeom.pmf(15, 30, 6, 14)`

5 ☐ `1 - stats.binom.pmf(15, 30, 1/5)`

6 ☐ Ved ikke / Intet svar

I eksamen får studerende 5 point for et rigtigt svar og -1 point for et forkert svar.

Spørgsmål I.2 (2)

Lad den stokastiske variabel Y være det samlede antal point opnået til eksamen, stadig under antagelse af at den studerende svarer fuldstændig tilfældigt, hvad er standardafvigelsen af Y ?

1 ☐ $\sqrt{30 \left(\frac{4}{5} + 5^2 \cdot \frac{1}{5} \right)} = \sqrt{174}$

2 ☐ $\sqrt{30 \left(1.2^2 \cdot \frac{4}{5} + 4.8^2 \cdot \frac{1}{5} \right)} = \sqrt{172.8}$

3 ☐ $30\sqrt{\frac{4}{5} + 5^2 \cdot \frac{1}{5}} = 30\sqrt{5.8}$

4 ☐ $30\sqrt{\frac{4}{5^2}} = 30\sqrt{0.16}$

5 ☐ $\sqrt{30 \cdot \frac{4}{5^2}} = \sqrt{4.8}$

6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 3

Opgave II

En forsker planlægger at undersøge effekten af et nyt lægemiddel, der reducerer antallet af restitutionsdage efter en bestemt procedure. I et tidligere pilotstudie blev det fundet, at patienter, som fik lægemidlet, i gennemsnit havde brug for 19 dage til at komme sig efter proceduren. Dette resultat virker lovende, da patienter, som ikke får lægemidlet, i gennemsnit har brug for 23 dage til at komme sig. Den estimerede standardafvigelse for antallet af restitutionsdage er 12 dage, og det antages, at denne standardafvigelse gælder både for patienter, der får lægemidlet, og dem, der ikke gør.

Da det tidligere pilotstudie kun var baseret på et lille antal patienter, planlægger forskeren at gennemføre en ny undersøgelse med en større stikprøve. Forskeren vil måle antallet af restitutionsdage i en stikprøve på n patienter og estimere det gennemsnitlige antal restitutionsdage, og det antages, at data er normalfordelte. Forskeren vil derefter teste, om dette gennemsnit er signifikant forskelligt fra 23 dage (nulhypotesen). Et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$ vil blive anvendt, og forskeren ønsker, at undersøgelsen skal have en statistisk styrke på 70% ($1 - \beta = 0.70$) under en alternativ hypotese, hvor middelværdi og varians svarer til de værdier, der blev observeret i pilotstudiet.

For at besvare det følgende spørgsmål oplyses følgende fraktiler fra en standardnormalfordeling:

$z_{0.50}$	$z_{0.60}$	$z_{0.70}$	$z_{0.80}$	$z_{0.90}$	$z_{0.95}$	$z_{0.975}$	$z_{0.99}$	$z_{0.995}$
0.00	0.25	0.52	0.84	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Spørgsmål II.1 (3)

Hvor stor skal stikprøvestørrelsen n være?

1 ☐ 5

2 ☐ 42

3 ☐ 44

4 ☐ 56

5 ☐ 71

6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 4

Spørgsmål II.2 (4)

Hvilket af følgende udsagn er FALSK?

- 1 ☐ Risikoen for at begå en Type I-fejl i den nye undersøgelse er 5%
- 2 ☐ Risikoen for at begå en Type II-fejl i den nye undersøgelse er 70%
- 3 ☐ Signifikansniveauet α er det samme som risikoen for at begå en Type I-fejl
- 4 ☐ Den statistiske styrke er det samme som *sandsynligheden for korrekt at forkaste nulhypotesen, hvis nulhypotesen er falsk*.
- 5 ☐ Hvis den sande effekt af lægemidlet er mindre end antaget, vil den statistiske styrke af undersøgelsen også være mindre.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 5

Opgave III

I en undersøgelse ønsker et universitet at undersøge, om niveauet for deklaration af Generativ AI i studerendes rapporter er forbundet med typen af akademisk projekt.

Efter indførelsen af et obligatorisk bibliotekskursus om ansvarlig brug af Generativ AI skal de studerende eksplicit angive i metodekapitlet, om de har brugt Generativ AI-værktøjer (såsom ChatGPT, Claude eller Copilot) som en del af deres projekt eller i forbindelse med skrivningen af deres rapporter.

Niveauet for AI-deklaration i rapporten klassificeres som: (1) Eksplicit deklaration (klart dokumenteret brug), (2) Delvis deklaration (nævner "hvad", men ikke "hvordan") og (3) Ingen deklaration.

Projekttypen klassificeres som: (1) Bachelorprojekt, (2) Kandidatspeciale og (3) Anden projektrapport.

I en tilfældig stikprøve på 240 studerendes rapporter er resultaterne opsummeret i tabellen nedenfor:

Projekttype:	AI-deklarationsniveau:			Total
	Eksplicit	Delvis	Ingen	
Bachelorprojekt	40	20	20	80
Kandidatspeciale	50	30	20	100
Anden rapport	10	20	30	60
Total	100	70	70	240

Forskeren ønsker at teste hypotesen om uafhængighed mellem Generativ AI-deklarationer og projekttype. Det ønskede signifikansniveau α er gemt i Python i en variabel kaldet `alpha`.

Spørgsmål III.1 (5)

Hvilken af følgende Python-kodelinjer beregner korrekt den kritiske værdi for den relevante hypotesetest?

1 ☐ `critical_value = stats.chi2.ppf(1 - alpha/2, df = 239)`

2 ☐ `critical_value = stats.chi2.ppf(1 - alpha, df=4)`

3 ☐ `critical_value = stats.f.ppf(1 - alpha, dfn=2, dfd=4)`

4 ☐ `critical_value = stats.f.cdf(1 - alpha, dfn=2, dfd=6)`

5 ☐ `critical_value = stats.t.cdf(1 - alpha/2, df=8)`

6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Spørgsmål III.2 (6)

Ved brug af antalstabellen om deklaration af generativ AI i studenterrapporter (bachelorprojekter, kandidatspecialer og andre rapporter) ønsker en forsker nu at udføre en test for uafhængighed mellem deklaration af generativ AI og rapporttype ved hjælp af Python.

De observerede antal fra undersøgelsen er gemt i Python som følgende "array":

```
observed = np.array([[40, 20, 20],  
                    [50, 30, 20],  
                    [10, 20, 30]])
```

Hvilken af følgende Python-kodelinjer udfører korrekt testen for denne antalstabel?

1 ☐ `stats.chi2.cdf(observed)`

2 ☐ `stats.chi2.ppf(observed)`

3 ☐ `stats.chi2_contingency(observed)`

4 ☐ `stats.ttest_ind(observed)`

5 ☐ `stats.chi2.pdf(observed)`

6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 7

Opgave IV

Forskere registrerer testscorer for tre store sprogmodeller (GPT, Claude og Gemini) inden for tre domæner (ræsonnement, kodning og matematik). Modellernes scorer på tværs af domænerne er givet nedenfor:

Pointscore	GPT model	Claude model	Gemini model	Gns.
Ræsonnement	92.4	84.3	91.9	89.5
Kodning	80.0	82.0	76.2	79.4
Matematik	98.8	95.3	98.6	97.6
Gns.	90.4	87.2	88.9	88.8

Forskerne ”fitter” en tosidet variansanalyse model

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}; \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2),$$

med $\sum_i \alpha_i = 0$, $\sum_j \beta_j = 0$, til data under de sædvanlige antagelser. I de næste to spørgsmål antager vi blot, at modelantagelserne er opfyldt (selvom dette sandsynligvis ikke er tilfældet).

Spørgsmål IV.1 (7)

Hvad er den estimerede effekt af GPT-modellen ifølge modellen?

- 1 ☐ 90.40
- 2 ☐ 30.1
- 3 ☐ 10.0
- 4 ☐ 9.5
- 5 ☐ 1.6
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 8

Spørgsmål IV.2 (8)

Hvad er kvadratafgivelsessummen for domænerne, $SS(\text{domæne})$, ifølge modellen?

- 1 ☐ 71520
- 2 ☐ 499
- 3 ☐ 166
- 4 ☐ 15
- 5 ☐ Dette kan ikke bestemmes uden yderligere information.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 9

Opgave V

Lad Y_1 og Y_2 være uafhængige og normalfordelte stokastiske variable med middelværdi $\mu = 0$ og varians $\sigma^2 = 3^2$. Lad endvidere $Y = Y_1 - Y_2$ være forskellen mellem Y_1 og Y_2 .

Spørgsmål V.1 (9)

Lad z_α være α -fraktilen i standardnormalfordelingen. Hvilket af følgende intervaller dækker 90% af alle udfald af Y ?

- 1 ☐ $[z_{0.025}2 \cdot 3^2; z_{0.975}2 \cdot 3^2]$
- 2 ☐ $[z_{0.05}6; z_{0.95}6]$
- 3 ☐ $[z_{0.05}\sqrt{2} \cdot 3; z_{0.95}\sqrt{2} \cdot 3]$
- 4 ☐ $[z_{0.05}\frac{3}{\sqrt{2}}; z_{0.95}\frac{3}{\sqrt{2}}]$
- 5 ☐ $[z_{0.025}3; z_{0.975}3]$
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Betragt nu den stokastiske variabel $R = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$ (du kan tænke på R som afstanden fra et centrum, f.eks. en skytte der forsøger at ramme et mål, hvor Y_1 og Y_2 repræsenterer afvigelsen på den vandrette og lodrette akse).

Spørgsmål V.2 (10)

Hvad er den forventede værdi og varians af R^2 ?

- 1 ☐ $E(R^2) = 9$, og $V(R^2) = 4$
- 2 ☐ $E(R^2) = 18$, og $V(R^2) = 2 \cdot 3^3$
- 3 ☐ $E(R^2) = 18$, og $V(R^2) = \sqrt{2} \cdot 3^2$
- 4 ☐ $E(R^2) = 18$, og $V(R^2) = 3^4 \cdot 4$
- 5 ☐ $E(R^2) = 9$, og $V(R^2) = \sqrt{2} \cdot 3^2$
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 10

Lad nu μ_{R^2} og $\sigma_{R^2}^2$ betegne middelværdien og variansen af R^2 .

Spørgsmål V.3 (11)

Hvad er variansen af $R = \sqrt{R^2}$, ifølge den approksimative ikke-lineære fejlophobningsregel?

1 ☐ $V(R) \approx \frac{\sigma_{R^2}^2}{4\mu_{R^2}}$

2 ☐ $V(R) \approx \frac{\sigma_{R^2}^2}{4(\mu_{R^2})^2}$

3 ☐ $V(R) \approx \frac{\sigma_{R^2}^2}{2\mu_{R^2}}$

4 ☐ $V(R) \approx \frac{\sigma_{R^2}^2}{2(\mu_{R^2})^2}$

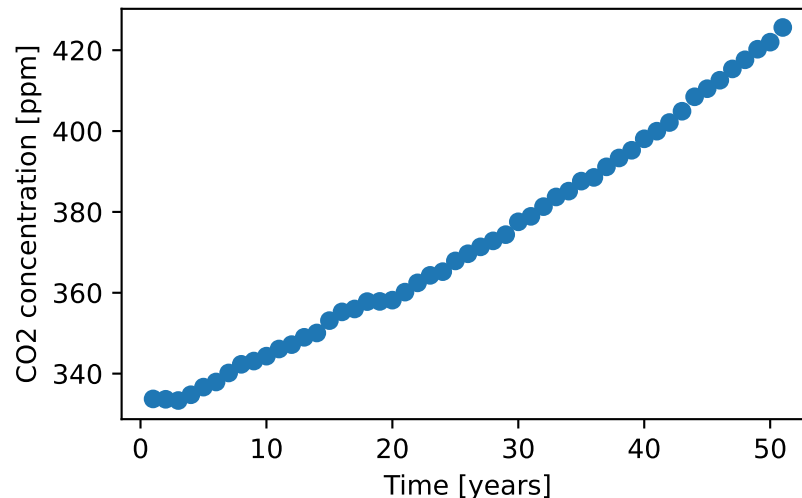
5 ☐ $V(R) \approx \frac{\sigma_{R^2}^2}{(\mu_{R^2})^2}$

6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 11

Opgave VI

Figuren nedenfor viser gennemsnitlige årlige CO₂-koncentrationer som funktion af tid siden 1973 (dvs. den sidste observation er 2024) ved en specifik målestation.



Spørgsmål VI.1 (12)

Lad r betegne den empiriske korrelationskoefficient mellem "Tid" og CO₂-koncentration. Hvilket af følgende udsagn om r kunne være korrekt?

- 1 ☐ $r \approx 0.8$
- 2 ☐ $r \approx 0$
- 3 ☐ $r \approx 0.99$
- 4 ☐ $r \approx -0.5$
- 5 ☐ $r \approx 0.5$
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

For at undersøge udviklingen i CO₂-koncentrationen som funktion af tid, er følgende analyse blevet udført i Python (`value` betegner CO₂-koncentrationen, og `co2` er en dataframe, der indeholder de ovenfor viste data). Nogle værdier er blevet erstattet af bogstaver.

Fortsæt på side 12

```
fit1 = smf.ols(formula = "value ~ time", data = co2).fit()
print(fit1.summary(slim=True))
```

OLS Regression Results

```
=====
```

Dep. Variable:	value	R-squared:	R2
Model:	OLS	Adj. R-squared:	R2a
No. Observations:	51	F-statistic:	4128.
Covariance Type:	nonrobust	Prob (F-statistic):	5.68e-49

```
=====
```

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
Intercept	325.14	0.86	t1	p1	l1	u1
time	1.84	0.03	t2	p2	l2	u2

```
=====
```

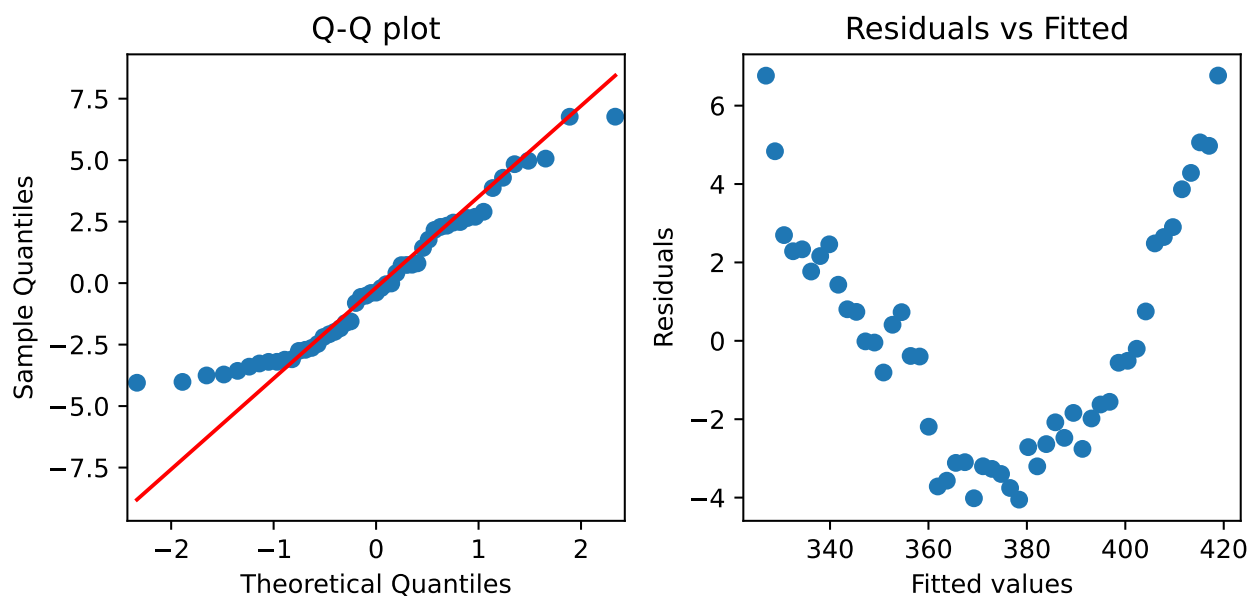
```
print(np.sqrt(fit1.scale))
3.00
```

Spørgsmål VI.2 (13)

Hvad er de omtrentlige værdier af l2 og u2?

- 1 ☐ l2 ≈ 1.42, u2 ≈ 2.26
- 2 ☐ l2 ≈ 1.78, u2 ≈ 1.90
- 3 ☐ l2 ≈ 1.00, u2 ≈ 2.68
- 4 ☐ l2 ≈ 1.83, u2 ≈ 1.85
- 5 ☐ l2 ≈ 0.16, u2 ≈ 3.52
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

For at validere modellens antagelser har man lavet nedenstående diagnostiske plots (baseret på den ovenfor præsenterede model).



Spørgsmål VI.3 (14)

Baseret på de diagnostiske plots, hvilket af følgende udsagn er korrekt (alle dele af svaret skal være korrekte)?

- 1 ☐ Uafhængighedsantagelsen er tydeligvis overtrådt (Q-Q-plottet), og variansen af residualerne afhænger af niveauet (Residuals vs. Fittet).
- 2 ☐ En datatransformation bør overvejes (Q-Q-plot), og "Residual vs. Fitted" antyder en logaritmisk transformation.
- 3 ☐ "Q-Q-plottet" antyder, at normalitetsantagelsen er opfyldt (de fleste punkter ligger på den rette linje), yderligere ser det ud til, at korrelationen mellem "fittede" værdier og residualer er tæt på nul, og derfor synes alle antagelser at være opfyldt.
- 4 ☐ "Q-Q-plottet" antyder, at systematiske effekter mangler i modellen, og yderligere antyder "Residuals vs. Fitted", at residual variansen er en funktion af fittede værdier.
- 5 ☐ Normalitetsantagelsen synes ikke at være opfyldt (Q-Q-plottet), og der er tydeligvis systematiske effekter, som ikke er inkluderet i modellen (Residual vs. Fitted).
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 14

Efter grundig overvejelse og modeludvikling foreslås følgende model (med input variablerne $\text{time} = \{1, 2, \dots, 51\}$, $\text{time2} = \{1, 2^2, \dots, 51^2\}$ og $\text{time3} = \{1, 2^3, \dots, 51^3\}$).

```
fit2 = smf.ols(formula = "value ~ time + time2 + time3", data = co2).fit()
print(fit2.summary(slim=True))
```

OLS Regression Results

```
=====
```

Dep. Variable:	value	R-squared:	0.999
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.999
No. Observations:	51	F-statistic:	2.109e+04
Covariance Type:	nonrobust	Prob (F-statistic):	1.60e-73

```
=====
```

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
Intercept	330.6110	0.466	708.890	0.000	329.673	331.549
time	1.3488	0.077	17.535	0.000	1.194	1.504
time2	0.0018	0.003	0.517	0.608	-0.005	0.009
time3	0.0002	4.32e-05	3.796	0.000	7.72e-05	0.000

```
=====
```

```
print(np.sqrt(fit2.scale))
0.77
```

Spørgsmål VI.4 (15)

Baseret på Python-opsummeringen ovenfor (dvs. at inputtene betragtes som uafhængige) og ved brug af signifikansniveau $\alpha = 0.05$, hvilken af følgende konklusioner er da korrekt (alle dele af svaret skal være korrekte)?

- 1 ☐ Da $1.6 \cdot 10^{-73} \ll 0.05$, bør alle parametre bevares i modellen.
- 2 ☐ Da både 0.0018 og 0.0002 begge er mindre end 0.05, kan vi udelade **time2** og **time3** fra modellen.
- 3 ☐ Da $0.608 > 0.05$, kan **time2** udelades.
- 4 ☐ Da 0.466 og 0.077 begge er større end 0.05, kan **Intercept** og **time** udelades i modellen.
- 5 ☐ Da konfidensintervallet for **time3** er $[7.72 \cdot 10^{-5}; 0.000]$, bør **time3** udelades fra modellen.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Formålet med modellen er at lave forudsigelser, og følgende konfidensinterval for en forudsigelse

5 år frem (dvs. ved `tid` = 56) er blevet foreslået.

$$\hat{y} \pm ME = 330.6 + 1.35 \cdot 56 + 0.0018 \cdot 56^2 + 0.0002 \cdot 56^3 \pm t_{0.975}(47) \cdot \sqrt{0.466^2 + 0.077^2 \cdot 56^2 + 0.003^2 \cdot 56^4 + (4.32 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 56^6}$$

hvor $t_{0.975}(47)$ er 0.975-fraktilen af t -fordelingen med 47 frihedsgrader.

Spørgsmål VI.5 (16)

Hvilken af følgende kommentarer til det foreslåede konfidensinterval er korrekt?

- 1 ☐ Antal frihedsgrader for t -fordelingen er forkert. Det burde være 51.
- 2 ☐ Beregningen er korrekt, hvis det kan verificeres, at inputtene (`time`, `time2` og `time3`) er tilnærmelsesvis normalfordelte.
- 3 ☐ Beregningen under kvadratroden antager et ortogonalt design, hvilket er forkert i det præsenterede tilfælde.
- 4 ☐ Da vi kun ser 5 år frem, bør 56 erstattes af 5 overalt.
- 5 ☐ Da de empiriske korrelationer mellem inputtene (`time`, `time2` og `time3`) er omtrent 0, vil beregningen også være omtrent korrekt.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Det er nu besluttet at teste 3. ordens modellen

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \text{time}_i + \beta_2 \text{time}_i^2 + \beta_3 \text{time}_i^3 + \epsilon_i; \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2),$$

mod nulhypotesen, at data kan beskrives af førsteordens modellen

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \text{time}_i + \epsilon_i; \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

I begge modeller antages det, at ϵ_i 'erne er iid..

Fortsæt på side 16

Spørgsmål VI.6 (17)

Hvad er den sædvanlige teststørrelse til sammenligning (dvs. test af hypotesen $\beta_2 = \beta_3 = 0$) af de to modeller (nogle af svarene bruger tal fra begge de præsenterede Python-opsummeringer)?

1 ☐ $\frac{21090-4128}{2} = 8481$

2 ☐ $\frac{21090-4128}{3^2} = 1885$

3 ☐ $\frac{3^2-0.77^2}{0.77^2} = 14.2$

4 ☐ $\frac{(3^2 \cdot 49 - 0.77^2 \cdot 47)/2}{0.77^2} = 347.8$

5 ☐ $\frac{(3^2 \cdot 49 - 0.77^2 \cdot 47)/2}{0.77^2/47} = 16375$

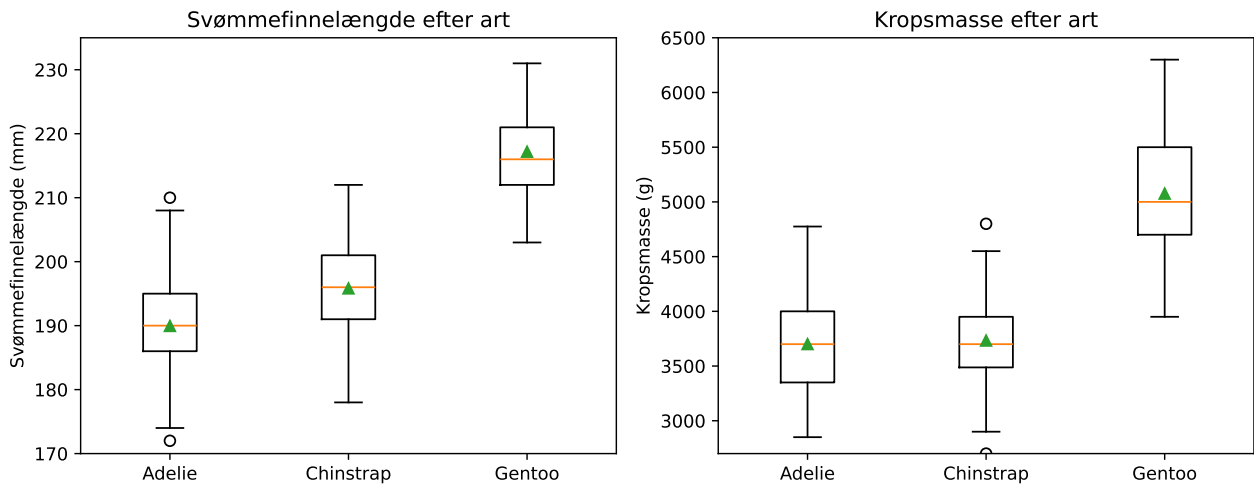
6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 17

Opgave VII

Vi betragter data om pingviner fra tre forskellige arter: **Adelie**, **Chinstrap** og **Gentoo**. Data er lagret i en Pandas DataFrame med navnet **penguins** og indeholder variablerne: **species**, **flipper_length_mm** og **body_mass_g**.

Data er visualiseret i figurerne nedenfor:



Nøgletal ("summary statistics") for hver art er:

Art	n	Svømmefinnelængde (mm)		Kropsmasse (g)	
		Middelværdi	Std. afv.	Middelværdi	Std. afv.
Adelie	151	189.95	6.54	3700.7	458.6
Chinstrap	68	195.82	7.13	3733.1	384.3
Gentoo	123	217.19	6.48	5076.0	504.1

Antag, at både svømmefinnelængde og kropsmasse inden for hver art er tilnærmelsesvis normalfordelte.

For at besvare følgende spørgsmål kan du få brug for en eller flere af følgende fraktiler ($t_{1-\alpha,\nu}$ er $1 - \alpha$ -fraktilen i en t -fordeling med ν frihedsgrader):

Antal frihedsgrader	$t_{0.95,\nu}$	$t_{0.975,\nu}$	$t_{0.995,\nu}$
$\nu = 67$	1.668	1.996	2.651
$\nu = 120$	1.658	1.980	2.617
$\nu = 122$	1.657	1.980	2.617
$\nu = 150$	1.655	1.976	2.609
$\nu = 200$	1.653	1.972	2.601
$\nu = 250$	1.651	1.969	2.596
$\nu = 300$	1.650	1.968	2.592

Spørgsmål VII.1 (18)

Hvad er det sædvanlige 95% konfidensinterval for middelværdien af svømmefinnelængden for Chinstrap pingviner?

- 1 ☐ [195.7; 195.9]
- 2 ☐ [176.9; 214.7]
- 3 ☐ [183.9; 207.7]
- 4 ☐ [194.1; 197.5]
- 5 ☐ [181.5; 210.1]
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

En ældre kilde angiver, at den gennemsnitlige svømmefinnelængde for Chinstrap-pingviner er $\mu_0 = 190$ mm. Brug stikprøvedataene fra den aktuelle undersøgelse til at teste

$$H_0 : \mu = 190 \quad \text{mod} \quad H_1 : \mu \neq 190.$$

Spørgsmål VII.2 (19)

Hvad er den korrekte teststørrelse og konklusionen af testen, ved signifikansniveau $\alpha = 0.05$?

- 1 ☐ Teststørrelsen bliver $t \approx 0.816$, og konklusionen er, at den observerede gennemsnitlige svømmefinnelængde for Chinstrap-pingviner IKKE er signifikant forskellig fra 190 mm (da 0.816 er mindre end 1.996).
- 2 ☐ Teststørrelsen bliver $t \approx 0.816$, og konklusionen er, at den observerede gennemsnitlige svømmefinnelængde for Chinstrap-pingviner ER signifikant forskellig fra 190 mm (da 0.816 er større end 0.05).
- 3 ☐ Teststørrelsen bliver $t \approx 6.73$, og konklusionen er, at den observerede gennemsnitlige svømmefinnelængde for Chinstrap-pingviner ER signifikant forskellig fra 190 mm (da 6.73 er større end 1.996).
- 4 ☐ Teststørrelsen bliver $t \approx 6.73$, og konklusionen er, at den observerede gennemsnitlige svømmefinnelængde for Chinstrap-pingviner IKKE er signifikant forskellig fra 190 mm (da 6.73% er større end 5%).
- 5 ☐ Teststørrelsen bliver $t \approx 5.45$, og konklusionen er, at den observerede gennemsnitlige svømmefinnelængde for Chinstrap-pingviner IKKE er signifikant forskellig fra 190 mm (da 5.45% er større end 5%).
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Vi ønsker at undersøge, om der er en signifikant forskel i den gennemsnitlige kropsmasse mellem **Adelie**- og **Chinstrap**-pingviner, hvilket svarer til at teste

$$H_0 : \mu_A = \mu_C \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_C.$$

Vi anvender signifikansniveau $\alpha = 0.05$ og bruger en to-sample t -test, der antager ens varians i de to grupper. Til dette formål kan du anvende det sammenvægtede to-sample estimat for variansen (estimeret ud fra Adelie- og Chinstrap-stikprøverne):

$$s_p^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_C - 1)s_C^2}{n_A + n_C - 2} = 190977 = 437^2.$$

Spørgsmål VII.3 (20)

Hvilket af følgende udsagn er SANDT?

- 1 ☐ Den estimerede forskel $\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_C$ er -32.4 gram, hvilket er en signifikant forskel, da den er mindre end 0.05% af den gennemsnitlige kropsmasse for både Adelie- og Chinstrap-pingviner.
- 2 ☐ Den relevante teststørrelse er omtrent $t = -0.07$, og den endelige konklusion er, at der er en signifikant forskel i kropsmasse mellem Adelie- og Chinstrap-arterne, da $|-0.07| = 0.07$ er større end 0.05 .
- 3 ☐ Den relevante teststørrelse er omtrent $t = -0.5$, og den endelige konklusion er, at vi IKKE finder en statistisk signifikant forskel i den gennemsnitlige kropsmasse mellem Adelie- og Chinstrap-arterne.
- 4 ☐ Den relevante teststørrelse er omtrent $t = -0.5$, men givet informationen i opgaven er vi ikke i stand til at afgøre, om forskellen er signifikant eller ej.
- 5 ☐ Den relevante teststørrelse er omtrent $t = -0.07$, og den endelige konklusion er, at vi IKKE finder en signifikant forskel i kropsmasse mellem Adelie- og Chinstrap-arterne, da $|-0.07| = 0.07$ er større end 0.05 .
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 20

Spørgsmål VII.4 (21)

Hvilket udsagn er SANDT vedrørende den sammenvægtede to-sample t -test?

- 1 ☐ Metoden antager, at de to populationer har ens varians.
- 2 ☐ Metoden kræver ens stikprøvestørrelser i de to grupper.
- 3 ☐ Metoden er uegnet, fordi stikprøvestørrelserne er større end 30.
- 4 ☐ Metoden tillader, at de to populationer har forskellige varianser og justerer frihedsgraderne derefter.
- 5 ☐ Metoden tester, om de to stikprøvevarianser er ens.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Modellen kan skrives som en generel lineær model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}; \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}),$$

hvor $\mathbf{Y}$ er samlingen af alle udfald (først dem fra Adelie, derefter dem fra Chinstrap). Designmatricen er nu valgt som

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{151} & \frac{68}{151+68} \mathbf{1}_{151} \\ \mathbf{1}_{68} & -\frac{151}{151+68} \mathbf{1}_{68} \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{1}_n$ er en kolonnevektor af et-taller med n -elementer, og $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2]$.

Spørgsmål VII.5 (22)

Lad $\hat{\sigma}^2$ betegne estimatet af σ^2 . Hvad er standardfejlene for $\hat{\beta}_1$ og $\hat{\beta}_2$ (betegnet se_{β_1} og se_{β_2})?

- 1 ☐ $se_{\beta_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{68+151}}$ og $se_{\beta_2} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{68+151}{68 \cdot 151}}$
- 2 ☐ $se_{\beta_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{151}}$ og $se_{\beta_2} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{68}}$
- 3 ☐ $se_{\beta_1} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{68}{151}}$ og $se_{\beta_2} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{151}{68}}$
- 4 ☐ $se_{\beta_1} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{68}{68+151}}$ og $se_{\beta_2} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{151}{151+68}}$
- 5 ☐ $se_{\beta_1} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{151}{68+151}}$ og $se_{\beta_2} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{68}{151+68}}$
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 21

Opgave VIII

En transportforsker undersøger, om tilslutningsraten for elbiler (EVs) er steget, efter at regeringen indførte incitamenter såsom gratis kommunal parkering og udbygget ladeinfrastruktur.

I et lille pilot studiet gennemført før incitamenterne viste det sig, at omkring 15% af husstandene ejede en elbil. Da pilotundersøgelsen var relativt lille ($n = 20$ husstande), er estimatet på 15% forbundet med betydelig usikkerhed.

For at planlægge en større opfølgende undersøgelse ønsker forskeren at estimere den sande andel af husstande, der ejer en elbil efter incitamenterne. Forskeren ønsker at konstruere et 95% konfidensinterval med en *Margin of Error* (ME) på kun 6%.

Spørgsmål VIII.1 (23)

Hvilken minimums stikprøvestørrelse n kræves for den opfølgende undersøgelse, hvis det antages, at den sande andel er lig med andelen fundet i pilot studiet?

- 1 ☐ $n = 120$
- 2 ☐ $n = 137$
- 3 ☐ $n = 210$
- 4 ☐ $n = 260$
- 5 ☐ $n = 310$
- 6 ☐ Ved ikke / intet svar

Forskeren udfører senere en undersøgelse af 300 husstande. Med resultatet

- Før incitamenterne: 36 ud af 150 husstande ejede en elbil.
- Efter incitamenterne: 51 ud af 150 husstande ejede en elbil.

Forskeren ønsker at teste, om andelen af elbilejere ændrede sig efter incitamenterne ved brug af signifikansniveauet $\alpha = 0.05$.

Fortsæt på side 22

Spørgsmål VIII.2 (24)

Hvilken af følgende konklusioner er korrekt?

- 1 ☐ $z_{obs} = 1.91 < 1.96$, så vi forkaster ikke H_0 og kan IKKE konkludere, at EV-udbredelsen er steget signifikant.
- 2 ☐ $z_{obs} = 1.45 < 1.96$, så vi forkaster ikke H_0 og konkluderer, at EV-udbredelsen ikke er steget signifikant.
- 3 ☐ $z_{obs} = 0.87 < 1.96$, så vi forkaster ikke H_0 og konkluderer, at EV-udbredelsen ikke er steget signifikant.
- 4 ☐ $z_{obs} = 1.91 < 1.96$, så vi forkaster ikke H_0 og konkluderer, at EV-udbredelsen er steget signifikant.
- 5 ☐ $z_{obs} = 3.02 > 1.96$, så vi forkaster H_0 og konkluderer, at EV-udbredelsen er steget signifikant.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 23

Opgave IX

En forsker analyserer toksiciteten af forskellige lægemidler mod en hjerte-kar-sygdom med en ensidet variansanalyse, som giver anledning til følgende variansanalyseskema:

Kilde	DF	SS
Lægemiddel	3	33.66
Residual	36	220.20
Total	39	253.86

Spørgsmål IX.1 (25)

Givet at modelantagelserne er opfyldt, hvad er den observerede F -teststørrelse for nulhypotesen om, at den gennemsnitlige toksicitet (middelvirkning) er den samme for alle lægemidlerne, mod den sædvanlige alternativhypotese?

- 1 ☐ $F_{\text{obs}} = 11.22$
- 2 ☐ $F_{\text{obs}} = 6.12$
- 3 ☐ $F_{\text{obs}} = 1.83$
- 4 ☐ $F_{\text{obs}} = 0.55$
- 5 ☐ $F_{\text{obs}} = 0.15$
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Spørgsmål IX.2 (26)

Den observerede F -teststørrelse skal sammenlignes med en fraktil fra hvilken fordeling ved test af nulhypotesen om, at den gennemsnitlige toksicitet (middelvirkning) er den samme for alle lægemidlerne, mod den sædvanlige alternativhypotese?

- 1 ☐ En F -fordeling med $\nu_1 = 3$ og $\nu_2 = 36$ frihedsgrader.
- 2 ☐ En F -fordeling med $\nu_1 = 4$ og $\nu_2 = 39$ frihedsgrader.
- 3 ☐ En F -fordeling med $\nu_1 = 36$ og $\nu_2 = 39$ frihedsgrader.
- 4 ☐ En t -fordeling med $\nu = 36$ frihedsgrader.
- 5 ☐ En t -fordeling med $\nu = 39$ frihedsgrader.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Spørgsmål IX.3 (27)

Hvad er den estimerede standardafvigelse for residualerne i variansanalysen?

- 1 ☐ 220.20
- 2 ☐ 14.84
- 3 ☐ 6.12
- 4 ☐ 3.35
- 5 ☐ 2.47
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Spørgsmål IX.4 (28)

Bonferroni-korrektionen bruges til at korrigere signifikansniveauet (α), når der udføres multiple test. Hvilket af følgende udsagn om effekten på risikoen for type I- og type II-fejl er korrekt for Bonferroni-korrektionen?

- 1 ☐ Bonferroni-korrektionen øger type I-risikoen, men reducerer type II-risikoen for de individuelle hypotesetest.
- 2 ☐ Bonferroni-korrektionen reducerer type I-risikoen, men øger type II-risikoen for de individuelle hypotesetest.
- 3 ☐ Bonferroni-korrektionen øger type I-risikoen og reducerer styrken af de individuelle hypotesetest.
- 4 ☐ Bonferroni-korrektionen reducerer type I-risikoen og øger styrken af de individuelle hypotesetest.
- 5 ☐ Bonferroni-korrektionen øger type I-risikoen for de individuelle hypotesetest, men reducerer den familiemæssige (family-wise) type I-risiko.
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Fortsæt på side 25

Opgave X

Betragt den standard normalfordelte stokastiske variabel $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$ og matricerne

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

og definer de stokastiske variable $\mathbf{Y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{Z}_i$.

Spørgsmål X.1 (29)

Hvilket af følgende udsagn om varians-kovariansmatricerne ($V[\mathbf{Y}_i]$) er sandt?

- 1 ☐ $V[\mathbf{Y}_i] \neq V[\mathbf{Y}_j]$ for $i \neq j$.
- 2 ☐ $V[\mathbf{Y}_1] = V[\mathbf{Y}_2] = V[\mathbf{Y}_3]$.
- 3 ☐ $V[\mathbf{Y}_1] = V[\mathbf{Y}_2]$, men $V[\mathbf{Y}_1] \neq V[\mathbf{Y}_3]$
- 4 ☐ $V[\mathbf{Y}_1] = V[\mathbf{Y}_3]$, men $V[\mathbf{Y}_1] \neq V[\mathbf{Y}_2]$
- 5 ☐ $V[\mathbf{Y}_2] = V[\mathbf{Y}_3]$, men $V[\mathbf{Y}_1] \neq V[\mathbf{Y}_2]$
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

Betragt nu $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_4)$ og den ortogonale projektionsmatrix

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spørgsmål X.2 (30)

Hvad er $E[\mathbf{Z}^T \mathbf{H} \mathbf{Z}]$?

- 1 ☐ 1
- 2 ☐ 2
- 3 ☐ 4
- 4 ☐ 6
- 5 ☐ 3
- 6 ☐ Ved ikke / Intet svar

SÆTTET ER SLUT. Nyd ferien!